7.5.17 Středová rovnice hyperboly

Předpoklady: 7508, 7513, 7516

Př. 1: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, excentricitu a urči rovnice asymptot hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic, pokud je její hlavní osa totožná s osou x a platí pro ni: a) $a=3$, $b=1$ b) $a=1$, $b=3$.

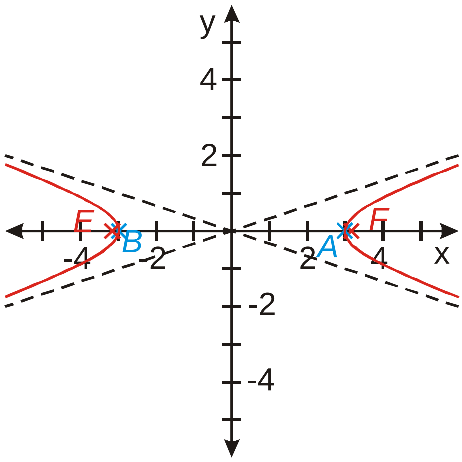
a) $a=3$, $b=1$

$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+1^2} \Rightarrow e=\sqrt{10}$

Vrcholy: $A[3;0]$, $B[-3;0]$.

Ohniska: $E\left[-\sqrt{10};0\right]$, $F\left[\sqrt{10};0\right]$.

Rovnice asymptot: $y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{1}{3}x$.



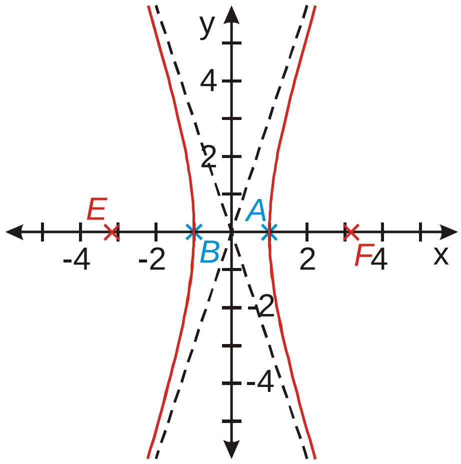
b) $a=1$, $b=3$

$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+3^2} \Rightarrow e=\sqrt{10}$

Vrcholy: $A[1;0]$, $B[-1;0]$.

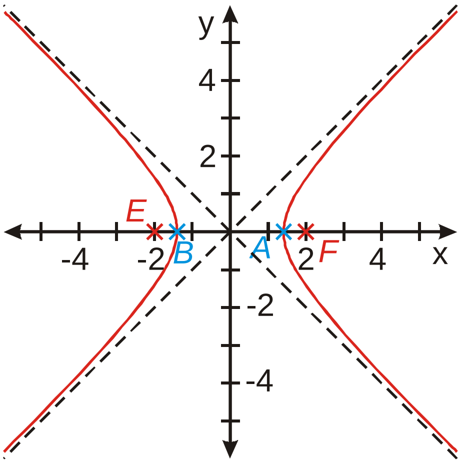
Ohniska: $E\left[-\sqrt{10};0\right]$, $F\left[\sqrt{10};0\right]$.

Rovnice asymptot: $y=3x$, $y=-3x$.



Podobně jako u elipsy: velikosti poloos rozhodují o tom, ve kterém směru je hyperbola „natažená“.
Jinak než u elipsy: ani když je $b>a$ nestává se z ní hlavní poloosa (ohniska pořád leží na přímce AB).

Je nevyšší čas odvodit rovnici hyperboly. Odvozování probíhá stejně jak u elipsy.



Souřadnice vyznačených bodů: $E[-e;0]$, $F[e;0]$, $A[a;0]$, $B[-a;0]$.

Podmínka pro hyperbolu: $\left||XF|-|XE|\right|=2a$.

Dosadíme: $\left|\sqrt{(x-e)^2+y^2}-\sqrt{(x+e)^2+y^2}\right|=2a$

Po dlouhém upravování a dvojím umocňování dojdeme k rovnici $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Hyperbola se středem v počátku soustavy souřadnic, jejíž hlavní osa je totožná s osou x a jejíž hlavní poloosa má velikost a, vedlejší pak b, je dána rovnicí $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

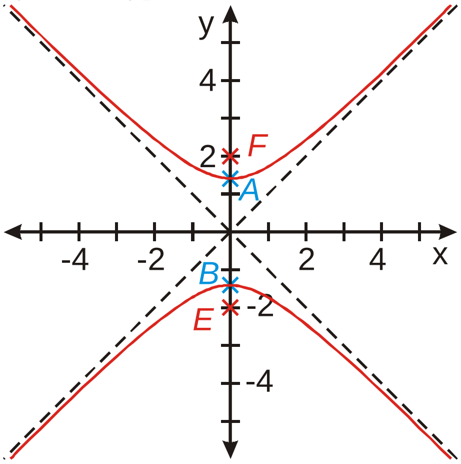
Rovnice se liší od rovnici elipsy se středem v počátku jediným znaménkem.
Rovnici můžeme použít na snadnější odvození rovnic asymptot:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1$$

Žádný bod asymptoty na hyperbole neleží, splňují rovnici $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$. Každá závorka nám dává rovnici jedné asymptoty.

Poznámka: Pokud jde o kreslení obrázku jsou výpočty asymptot v podstatě zbytečné. Daleko jednodušší je určit velikosti poloos a nakreslit od středu hyperboly pravoúhlý trojúhelník vybarvený v minulé hodině.

Zůstává poslední problém: na začátku jsme otáčeli graf funkce $y=\frac{1}{x}$ o $45°$ ve směru hodinových ručiček. Kdybychom ji otočili o $45°$ proti směru hodinových ručiček, získali bychom hyperbolu na obrázku níže. Jakou rovnici bude mít tato hyperbola?



Jak víme z příkladu 7 z minulé hodiny, nebude stačit fakt, že je $b > a$ jako u elipsy. Svisle rozevřená hyperbola má oproti vodorovně otevřené prohozené osy *x* a *y* $\Rightarrow$ prohodíme je i v rovnici: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ $\Rightarrow$ o orientaci hyperboly rozhoduje znaménko mínus, kladný člen v rovnici určuje hlavní osu.

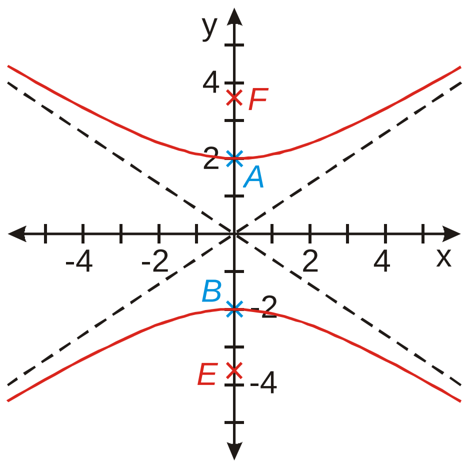
Hyperbola se středem v počátku soustavy souřadnic, jejíž hlavní osa je totožná s osou *y* a jejíž hlavní poloosa má velikost *b*, vedlejší pak *a*, je dána rovnicí $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Pedagogická poznámka: Čas na řešení následujících dvou příkladů je omezený tím, aby studenti stihli začít s příkladem 4. , proto všichni studenti stihnou pouze příklad 1 a příklad 2 zůstává pro ty rychlejší.
Stejná situace je potom situace s příklady 3 a 4.

Př. 2: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, ohnisek, excentricitu a urči rovnice asymptot hyperboly $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$.

Z rovnice vidíme: hlavní osou je osa *y*, střed $S[0;0]$.
Hlavní poloosa: $b = 2$, vedlejší poloosa $a = 3$.
Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} \Rightarrow e = \sqrt{13}$.
Vrcholy: $A[0;2]$, $B[0;-2]$, ohniska: $E\left[0;-\sqrt{13}\right]$, $F\left[0;\sqrt{13}\right]$.

Rovnice asymptot: $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$.



Př. 3: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, ohnisek, excentricitu a urči rovnice asymptot hyperboly $4x^2 - 6y^2 - 24 = 0$.

Nejdříve musíme upravit rovnici do tvaru, ze kterého je možné něco poznat:

$$4x^2 - 6y^2 = 24$$

$$\frac{4x^2}{24} - \frac{6y^2}{24} = 1$$

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$$

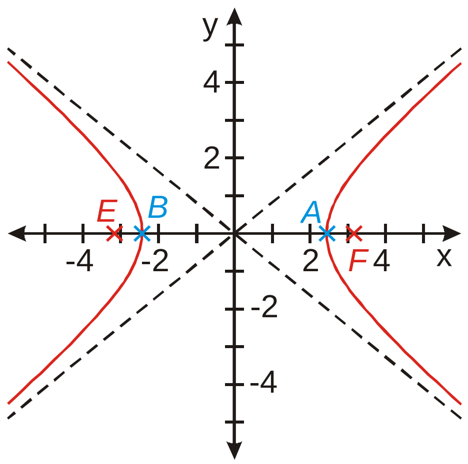
Hlavní osou je osa *x*, střed $S[0;0]$.

Hlavní poloosa: $a=\sqrt{6}$, vedlejší poloosa $b=2$.

Excentricita: $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+2^2}\Rightarrow e=\sqrt{10}$.

Vrcholy: $A\left[\sqrt{6};0\right]$, $B\left[-\sqrt{6};0\right]$, ohniska: $E\left[-\sqrt{10};0\right]$, $F\left[\sqrt{10};0\right]$.

Rovnice asymptot: $y=\frac{2}{\sqrt{6}}x=\frac{\sqrt{6}}{3}x$, $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}x=-\frac{\sqrt{6}}{3}x$.



Jak se změní rovnice hyperboly, když její střed posuneme do bodu $S[m;n]$?

Stejně jako u elipsy, kde se z rovnice $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se stala rovnice $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$.

Hyperbola se středem $S[m;n]$, hlavní osou $y=n$ a vedlejší osou $x=m$ má středovou rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$. Její asymptoty jsou dány rovnicemi $\frac{x-m}{a}=\pm\frac{y-n}{b}$.

Hyperbola se středem $S[m;n]$, hlavní osou $x=m$ a vedlejší osou $y=n$ má středovou rovnici $\frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1$. Její asymptoty jsou dány rovnicemi $\frac{x-m}{a}=\pm\frac{y-n}{b}$.

Př. 4: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, ohnisek, excentricitu a urči rovnice asymptot hyperboly $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$.

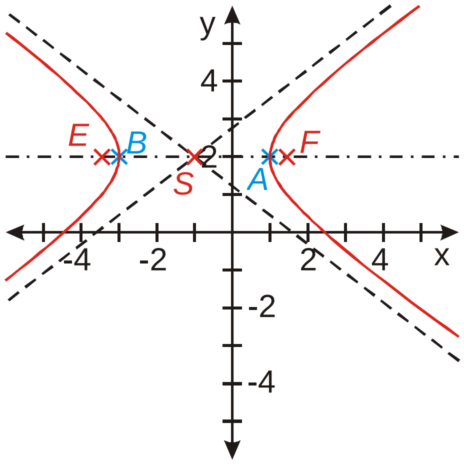
Hlavní osou je přímka $y=2$, střed $S[-1;2]$.

Hlavní poloosa: $a=2$, vedlejší poloosa $b=\sqrt{2}$.

Excentricita: $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\Rightarrow e=\sqrt{6}$.

Vrcholy: $A[1;2]$, $B[-3;2]$, ohniska: $E\left[-1-\sqrt{6};2\right]$, $F\left[-1+\sqrt{6};2\right]$.

Rovnice asymptot: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+1}{2}=-\frac{y-2}{\sqrt{2}}$.



Shrnutí: Se středovou rovnicí hyperboly pracujeme podobně jako se středovou rovnicí elipsy.